EJERCICIOS RESUELTOS ADICIONALES

PROBLEMA 1.
Sean X e Y variables aleatorias tales que

$$f_Y(y/x)=\begin{cases} c.\dfrac{y}{x^2} & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases} \quad ; \quad f_X(x)=\begin{cases} kx^4 & 0<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}.$$

a. ¿Las variables X e Y son independientes?. Justifique su respuesta

b. Calcule $P\left\{\left(\frac{3}{4}<X<1\right)\Big/ Y=\frac{1}{2}\right\}$

SOLUCIÓN.

a. ¿Las variables X e Y son independientes?. Justifique su respuesta

SOLUCIÓN.

Cálculo de c y k:

$$\int_0^x c.\frac{y}{x^2}dy = c.\frac{y^2}{2x^2}\Big|_0^x = \frac{c}{2}=1 \Rightarrow c=2 \quad ; \quad \int_0^1 k.x^4dx = k.\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{k}{5}=1\Rightarrow k=5$$

Por lo tanto

$$f_Y(y/x)=\begin{cases} \dfrac{2y}{x^2} & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases} \quad ; \quad f_X(x)=\begin{cases} 5x^4 & 0<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Construcción de la función de densidad conjunta de X e Y:

$$f_{XY}(x,y)=f_Y(y/x).f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2y}{x^2}.5x^4 & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases} = \begin{cases} 10x^2y & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Construcción de la función de densidad marginal de Y:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \displaystyle\int_y^1 10x^2ydx = \frac{10x^3y}{3}\Big|_y^1 & 0<y<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases} = \begin{cases} \dfrac{10y(1-y^3)}{3} & 0<y<1 \\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Conclusión del estudio de la independencia de X e Y:

Contraejemplo: $f_{XY}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$, $f_X(\frac{1}{2})\times f_Y(\frac{1}{2})=\frac{5}{16}\times\frac{35}{24}=\frac{175}{384} \Rightarrow f_{XY}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\neq f_X(\frac{1}{2})\times f_Y(\frac{1}{2})$

Por lo tanto, se concluye que X e Y no son independientes.

b. Calcule $P\left\{\left(\frac{3}{4}<X<1\right)\Big/ Y=\frac{1}{2}\right\}$

SOLUCIÓN.

$$P\left\{\left(\frac{3}{4}<X<1\right)\Big/ Y=\frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{3}{4}}^1 f_X(x/Y=\tfrac{1}{2})dx = \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{f_{XY}(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})}dx = \frac{10.\frac{1}{2}}{\frac{10.\frac{1}{2}(1-\frac{1}{8})}{3}}\int_{\frac{3}{4}}^1 x^2dx$$

$$=\frac{24}{7}\int_{\frac{3}{4}}^1 x^2dx = \frac{24}{7}.\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{3}{4}}^1 = \frac{8}{7}.\left[1-(\tfrac{3}{4})^3\right] = \frac{8}{7}.\frac{37}{64}=\frac{37}{56}$$

PROBLEMA 2.

Considere dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta viene dada por

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}3y & (x,y)\in D_{XY}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases},$$

donde $D_{XY}=\{(x,y)\in R^2 : y\geq 0\ ,\ y+x\leq 1\ ,\ y-x\leq 1\}$.

a. ¿Las variables X e Y están correlacionadas? Justifique su respuesta

b. Obtenga $f_X(x / Y=\frac{1}{2})$ y $f_Y(y / X=\frac{1}{2})$

c. Determine $V(Y / X = x)$

SOLUCIÓN.

a. ¿Las variables X e Y están correlacionadas? Justifique su respuesta

SOLUCIÓN.

Gráfico de la región D_{XY} (ver figura 10):

Cálculo de la correlación o valor esperado conjunto de X e Y:

$$E(XY)=\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} xy.3ydxdy=\int_0^1 \left.\frac{3y^2x^2}{2}\right|_{y-1}^{1-y} dy=\int_0^1 \frac{3y^2((1-y)^2-(y-1)^2)}{2}dy=0$$

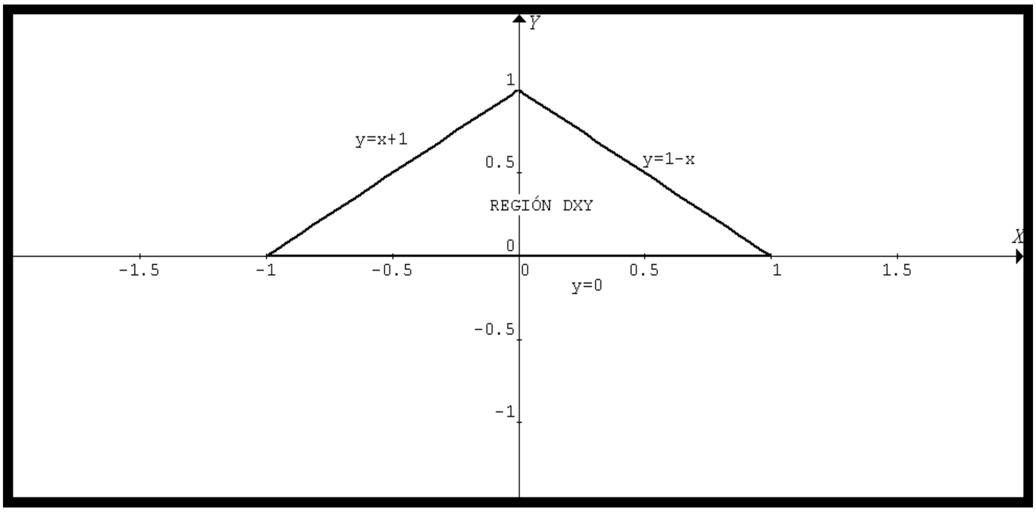

Figura 10. Región de interés

Construcción de la función de densidad marginal de la variable X:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{x+1} 3ydy & -1<x<0\\ \int_0^{1-x} 3ydy & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(x+1)^2 & -1<x<0\\ \frac{3}{2}(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Cálculo de las esperanzas marginales:

$$E(X)=\int_{-1}^0 \tfrac{3}{2}x(x+1)^2dx+\int_0^1 \tfrac{3}{2}x(1-x)^2dx=0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{y-1}^{1-y} 3y\,dx & 0<y<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}6y(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\ ;\ E\left[Y\right]=\int_0^1 6y^2(1-y)dy=\frac{1}{2}$$

Conclusión del estudio de la correlación de X e Y:
Se verifica que $E(XY)=E(X).E(Y)=0$, lo que implica que X e Y son variables aleatorias no correlacionadas, más aún X e Y son ortogonales.

b. Obtenga $f_X(x/Y=\frac{1}{2})$ y $f_Y(y/X=\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN.

$$f_Y(y/x)=\begin{cases}\frac{3y}{\frac{3}{2}(1+x)^2} & 0<y<x+1,\ \ -1<x<0\\ \frac{3y}{\frac{3}{2}(1-x)^2} & 0<y<1-x,\ \ 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2y}{(1+x)^2} & 0<y<x+1,\ \ -1<x<0\\ \frac{2y}{(1-x)^2} & 0<y<1-x,\ \ 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$f_X(x/y)=\begin{cases}\frac{3y}{6y(1-y)} & (x,y)\in D_{XY}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2(1-y)} & (x,y)\in D_{XY}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Por lo tanto

$$f_X(x/Y=\tfrac{1}{2})=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\ ;\ f_Y(y/X=\tfrac{1}{2})=\begin{cases}8y & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

c. Determine $V(Y/X=x)$

SOLUCIÓN.

Se tiene que $V(Y/X)=E(Y^2/X)-\left[E(Y/X)\right]^2$. En tal sentido

$$E(Y/X)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1+x} y.f_y(y/x)dy=\frac{1}{f_X(x)}\int_0^{1+x} y.f_{XY}(x,y)dy & -1<x<0\\ \displaystyle\int_0^{1-x} y.f_y(y/x)dy=\frac{1}{f_X(x)}\int_0^{1-x} y.f_{XY}(x,y)dy & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$E(Y/X)=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{\frac{3}{2}(x+1)^2}\int_0^{1+x}3y^2dy & -1<x<0\\ \displaystyle\frac{1}{\frac{3}{2}(x+1)^2}\int_0^{1-x}3y^2dy & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\Rightarrow E(Y/X)=\begin{cases}\frac{2}{3}(1+x) & -1<x<0\\ \frac{2}{3}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$E(Y^2/X)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1+x} y^2.f_y(y/x)dy=\frac{1}{f_X(x)}\int_0^{1+x} y^2.f_{XY}(x,y)dy & -1<x<0\\ \displaystyle\int_0^{1-x} y^2.f_y(y/x)dy=\frac{1}{f_X(x)}\int_0^{1-x} y^2.f_{XY}(x,y)dy & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$E(Y^2/X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{3}{2}(x+1)^2}\displaystyle\int_0^{1+x}3y^3dy & -1<x<0\\ \dfrac{1}{\frac{3}{2}(x+1)^2}\displaystyle\int_0^{1-x}3y^3dy & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\Rightarrow E(Y^2/X)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x)^2 & -1<x<0\\ \frac{1}{2}(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Por lo tanto

$$V(Y/X)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x)^2-\frac{4}{9}(1+x)^2 & -1<x<0\\ \frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{4}{9}(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{18}(1+x)^2 & -1<x<0\\ \frac{1}{18}(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

PROBLEMA 3.

Considere dos variables aleatorias X e Y, tal que X es una variable aleatoria continua e Y es una variable aleatoria discreta, cuya función de densidad conjunta viene dada por la expresión

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^y}{y!}e^{-2x} & x>0\ ,\ y=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

a. Calcule las funciones de densidad marginales

b. Calcule las funciones de distribución marginales

c. ¿Qué se puede decir acerca de la correlación de X e Y?

SOLUCIÓN.

a. Calcule las funciones de densidad marginales

SOLUCIÓN.

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{y=0}^{\infty}\frac{x^y}{y!}e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}e^{-2x}\displaystyle\sum_{y=0}^{\infty}\frac{x^y}{y!} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-2x}.e^{x} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=e^{-x}u(x)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^y}{y!}e^{-2x}dx & y=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2^{y+1}} & y=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\delta(y-i)\right]$$

b. Calcule las funciones de distribución marginales

SOLUCIÓN.

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \displaystyle\int_0^{x}e^{-t}dt & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-x} & x>0\end{cases}=(1-e^{-x})u(x)$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{[y]}(\tfrac{1}{2})^{i+1} & y\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-(\frac{1}{2})^{[y]} & y\ge 0\end{cases}$$

c. ¿Qué se puede decir acerca de la correlación de X e Y?

SOLUCIÓN.

$$E(XY)=\int_0^{\infty}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\frac{xy.x^y}{y!}e^{-2x}\right]dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}\left[\sum_{y=1}^{\infty}\frac{x^{y-1}}{(y-1)!}\right]dx$$

$$=\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}\left[\sum_{y=0}^{\infty}\frac{x^y}{y!}\right]dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}.e^xdx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$$

$$E(X)=\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=1\ ,\ E(Y)=\sum_{y=0}^{\infty}y\left(\frac{1}{2}\right)^{y+1}=\frac{1}{2}\sum_{y=0}^{\infty}y\left(\frac{1}{2}\right)^{y}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.2=1$$

$E(XY)\neq E(X).E(Y)$. Por lo tanto, X e Y están correlacionadas

PROBLEMA 4.

Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{2x+y}{18} & \text{si } (x,y)\in\{(1,1);(2,1);(1,2);(2,2)\}\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

a. Calcule las funciones de densidad marginales

b. Construya la función de distribución conjunta

c. Construya las funciones de distribución marginales

d. Halle la media y la varianza condicionales de X dado que $Y=y$ si $y=1$ ó $y=2$

SOLUCIÓN.

a. Calcule las funciones de densidad marginales

SOLUCIÓN.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{18}+\frac{2x+2}{18} & x=1,2\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{4x+3}{18} & x=1,2\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\frac{7}{18}\delta(x-1)+\frac{11}{18}\delta(x-2)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2+y}{18}+\frac{4+y}{18} & y=1,2\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\begin{cases}\frac{6+2y}{18} & y=1,2\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}=\frac{8}{18}\delta(y-1)+\frac{10}{18}\delta(y-2)$$

b. Construya la función de distribución conjunta

SOLUCIÓN.

$$F_{XY}(x,y)=\frac{3}{18}EUB(x-1,y-1)+\frac{5}{18}EUB(x-2,y-1)+\frac{4}{18}EUB(x-1,y-2)+\frac{6}{18}EUB(x-2,y-2)$$

c. Construya las funciones de distribución marginales

SOLUCIÓN.

$$F_X(x)=\frac{7}{18}u(x-1)+\frac{11}{18}u(x-2)\ ;\ F_Y(y)=\frac{8}{18}u(y-1)+\frac{10}{18}u(y-2)$$

d. Halle la media y la varianza condicionales de X dado que $Y=y$ si $y=1$ ó $y=2$

SOLUCIÓN.

Sea el evento $A=\{y:y=1\text{ ó }y=2\}$. Se puede inferir que $P\{A\}=1$. Por lo tanto

$$E(X/A)=1.P\{(X=1)/A\}+2.P\{(X=2)/A\}=1.P\{X=1\}+2.P\{X=2\}$$

$$=1.\left(\frac{3}{18}+\frac{4}{18}\right)+2.\left(\frac{5}{18}+\frac{6}{18}\right)=\frac{7}{18}+\frac{22}{18}=\frac{29}{18}$$

$$E(X^2/A)=1.P\{(X=1)/A\}+4.P\{(X=2)/A\}=1.P\{X=1\}+4.P\{X=2\}$$

$$=1.\left(\frac{3}{18}+\frac{4}{18}\right)+4.\left(\frac{5}{18}+\frac{6}{18}\right)=\frac{7}{18}+\frac{44}{18}=\frac{51}{18}$$

$$V(X/A) = E(X^2/A) - [E(X/A)]^2 = \frac{51}{18} - \left(\frac{29}{18}\right)^2 = \frac{51\times 18 - 29\times 29}{(18)^2} = \frac{918-841}{324} = \frac{77}{324}$$

PROBLEMA 5.

Suponga que en dos lugares de una habitación se mide la intensidad del ruido. Sean X e Y variables aleatorias que representan la intensidad del ruido en los dos puntos. Suponga que la función de densidad conjunta de las intensidades es continua y viene dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{si } x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. Calcule las densidades marginales de X e Y

b. $P\{X \le 1, Y \le 1\}$

c. ¿Son independientes X e Y? ¿Son correlacionadas X e Y?

SOLUCIÓN.

a. Calcule las densidades marginales de X e Y

SOLUCIÓN.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases} = \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)u(x)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases} = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases} = \left(ye^{-\frac{y^2}{2}}\right)u(y)$$

b. $P\{X \le 1, Y \le 1\}$

SOLUCIÓN.

$$P\{X \le 1, Y \le 1\} = \int_0^1 \int_0^1 xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dydx = (1-e^{-1/2})^2 \approx 0.1548$$

c. ¿Son independientes X e Y? ¿Son correlacionadas X e Y?

SOLUCIÓN.

$f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$, por lo tanto X e Y son independientes. En consecuencia, X e Y no están correlacionadas

PROBLEMA 6.

Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y\ ,\ y<1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

a. Construya la función de distribución acumulativa de probabilidades conjunta

b. ¿Qué se puede decir acerca de la independencia de X e Y?

c. Construya las funciones de distribución marginales

d. Obtenga $F_{XY}(x,y / TC(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ y $f_{XY}(x,y / TC(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$

SOLUCIÓN.

a. Construya la función de distribución acumulativa de probabilidades conjunta

SOLUCIÓN.

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \vee y<0 \\ \int_0^x \int_{x'}^y 2dy'dx' & 0<x<y, y<1 \\ \int_0^x \int_{x'}^1 2dy'dx' & 0<x\le 1, y\ge 1 \\ \int_0^y \int_{x'}^y 2dy'dx' & 0<y<x, y<1 \\ 1 & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<0 \vee y<0 \\ x(2y-x) & 0<x<y, y<1 \\ x(2-x) & 0<x\le 1, y\ge 1 \\ y^2 & 0<y<x, y<1 \\ 1 & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

b. ¿Qué se puede decir acerca de la independencia de X e Y?

SOLUCIÓN.

Cálculo de las funciones de densidad marginales

$$f_X(x)=\begin{cases} \int_x^1 2dy & 0<x<1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases} 2(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^y 2dx & 0<y<1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} 2y & 0<y<1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$f_{Xy}(x)=2\neq 2(1-x).2y=f_X(x).f_Y(y)$. Por lo tanto, X e Y no son independientes

c. Construya las funciones de distribución marginales

SOLUCIÓN.

Primera forma:

$$F_X(x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dt & x\le 0 \\ 0+\int_0^x 2(1-t)dt & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 2x-x^2 & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} \int_{-\infty}^0 0dy & y\le 0 \\ 0+\int_0^y 2ydy & 0<y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ y^2 & 0<y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$$

Segunda forma:

$$F_X(x)=F_{XY}(x,+\infty)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x(2-x) & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases} \quad , \quad F_Y(y)=F_{XY}(+\infty,y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ y^2 & 0\le y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$$

d. Obtenga $F_{XY}(x,y\,/\,TC(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$

SOLUCIÓN.

$$F_{XY}(x,y/TC(0.5,0.5)) = \begin{cases} \frac{F_{xy}(x,y)}{F_{xy}(0.5,0.5)} & x \le 0.5, y \le 0.5 \\ \frac{F_{xy}(x,0.5)}{F_{xy}(0.5,0.5)} & x \le 0.5, y \ge 0.5 \\ \frac{F_{xy}(0.5,y)}{F_{xy}(0.5,0.5)} & x \ge 0.5, y \le 0.5 \\ 1 & x \ge 0.5, y \ge 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 4F_{xy}(x,y) & x \le 0.5, y \le 0.5 \\ 4F_{xy}(x,0.5) & x \le 0.5, y \ge 0.5 \\ 4F_{xy}(0.5,y) & x \ge 0.5, y \le 0.5 \\ 1 & x \ge 0.5, y \ge 0.5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ 4y^2 & 0 < y < x, y < 0.5 \\ 4x(2y-x) & 0 < x < y, y < 0.5 \\ 4x(1-x) & 0 < x < 0.5, y > 0.5 \\ 1 & x \ge 0.5, y \ge 0.5 \end{cases}$$

En tal sentido

$$F_{XY}(x,y/TC(0.5,0.5)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ 4y^2 & 0 < y < x, y < 0.5 \\ 4x(2y-x) & 0 < x < y, y < 0.5 \\ 4x(1-x) & 0 < x < 0.5, y > 0.5 \\ 1 & x \ge 0.5, y \ge 0.5 \end{cases} \Rightarrow f_{XY}(x,y/TC(0.5,0.5)) = \begin{cases} 8 & 0 < x < y, y < 0.5 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

PROBLEMA 7.
Sean X e Y variables aleatorias tales que X toma los valores -1, 0 y 1, cada uno con probabilidad 1/3 e $Y = X^2$.

a. Encuentre la función de distribución y la función de densidad de Y
b. Demuestre de tres formas distintas que X e Y no son independientes
c. ¿Serán X e Y variables aleatorias correlacionadas?

SOLUCIÓN.

a. Encuentre la función de distribución y la función de densidad de Y

SOLUCIÓN.

Función de densidad de la variable aleatoria Y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\delta(y) + \frac{2}{3}\delta(y-1)$$

Función de densidad de la variable aleatoria Y:

$$F_Y(y) = \frac{1}{3}u(y) + \frac{2}{3}u(y-1)$$

b. Demuestre de tres formas distintas que X e Y no son independientes

SOLUCIÓN.

Primera forma:

Existe H(X) tal que $Y = H(X)$. Para este caso se tiene $H(X) = X^2$

Segunda forma:

Construcción de la función de densidad de probabilidades conjunta $f_{XY}(x,y)$:

Se tiene que X puede tomar los valores -1, 0 y 1 mientras que Y puede tomar los valores 0 y 1. En tal sentido se tiene que

$$f_{XY}(-1,1) = P\{X=-1, Y=1\} = f_{XY}(0,0) = P\{X=0, Y=0\} = f_{XY}(1,1) = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{3}.$$

La función de densidad de probabilidades conjunta de X e Y viene dada por

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{3}\left[\Delta(x+1, y-1) + \Delta(x,y) + \Delta(x-1, y-1)\right]$$

Se presenta el siguiente contrajemplo donde no se cumple la condición de independencia de las variables aleatorias X e Y. Sean

$$f_{XY}(-1,1)=\frac{1}{3} \quad ; \quad f_X(-1).f_Y(1)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Se observa que $f_{XY}(-1,1)\neq f_X(-1).f_Y(1)$. Por lo tanto X e Y no son independientes

Tercera forma:

Construcción de la función acumulativa de probabilidades conjunta $F_{XY}(x,y)$:

La función acumulativa de probabilidades conjunta de X e Y viene dada por

$$F_{XY}(x,y)=\frac{1}{3}\left[EUB(x+1,y-1)+EUB(x,y)+EUB(x-1,y-1)\right]$$

Se presenta el siguiente contrajemplo donde no se cumple la condición de independencia de las variables aleatorias X e Y. Sean

$$F_{XY}(0,0)=\frac{1}{3} \quad ; \quad F_X(0).F_Y(0)=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}.$$

Se observa que $F_{XY}(0,0)\neq F_X(0).F_Y(0)$. Por lo tanto X e Y no son independientes

c. ¿Serán X e Y variables aleatorias correlacionadas?

SOLUCIÓN.

Cálculo de la esperanza conjunta o correlación de las variables aleatorias X e Y:

$$E\left[XY\right]=\sum_x\sum_y xyP\{X=x\}P\{Y=y\}=-\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=0$$

Cálculo de las esperanzas marginales de cada variable:

$$E\left[X\right]=\sum_x xP\{X=x\}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0 \quad ; \quad E\left[Y\right]=\sum_y yP\{Y=y\}=\frac{2}{3}$$

Se puede ver que $E\left[XY\right]=E\left[X\right]E\left[Y\right]$ y por lo tanto X e Y no están correlacionadas